Les parties A, B et C sont indépendantes.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc du noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel de la façon suivante :

- x = 0 pour le blanc
- x =1 pour le noir
- x = 0,01 ; x = 0,02 et ainsi de suite jusqu'à x = 0,99 par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une nuance codée est dite assombrie par la fonction f si f(x) > x et éclaircie si f(x) < x.

Une fonction f définie sur [0 ;1] est dite « fonction de retouche » si elle possède les 4 propriétés suivantes :

- f(0) =0
- f(1) =1
- f est continue sur [0 ;1].
- f est croissante sur [0 ;1].

Une nuance codée est dite assombrie par la fonction f si f(x) > x et éclaircie si f(x) < x.

Partie A

1°) Montrer que vous avez bien compris l'énoncé.

2°) On considère la fonction $f_1$définie sur l'intervalle [0 ;1] par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

a) Démontrer que f_1 est une fonction de retouche.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$. Rendez avec votre copie de quoi comprendre votre méthode.
c) Interpréter ces résultats en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

3°) On considère la fonction f_2 définie sur [0 ;1] par $f_2(x) = \ln[1 + (e - 1)x]$.

a) f_2 est–elle une fonction de retouche ?
b) On définit sur l'intervalle [0 ;1] la fonction g par $g(x) = f_2(x) - x$.
   a. Déterminer les variations de la fonction g.
   b. Prouver que l'équation g(x) = 0,05 admet sur l'intervalle [0 ;1] deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.
   c. Avec votre calculatrice, déterminer deux encadrements à 0,1 près de ces deux solutions.

Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance finale modifiée est supérieure à 0,05.

1°) Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche. Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables :	x (nuance initiale)
	y (nuance retouchée)
	E (écart)
	c (compteur)
	k
Initialisation :	c prend la valeur 0
Traitement :	Pour k allant de 0 à 100, faire
	x prend la valeur $\frac{k}{100}$
	y prend la valeur $f(x)$
	E prend la valeur $\lvert y-x \rvert$
	Si $E \geqslant 0,05$, faire
	c prend la valeur $c+1$
	Fin si
	Fin pour
Sortie :	Afficher c

2°) Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la troisième question de la partie A ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle [0 ;1], f(x) $\leqslant$ x.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aide A_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de f , et les droites d'équation x = 0 et x =1.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image est celle correspondant à la plus petite aire.

On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$f_1(x) = xe^{x^2-1}$ et $f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}$.

1°) Calculer A_{f_1} et A_{f_2}.

2°) De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?