OLYMPIADES AP 8

Activité 1 (1 +1 + 4 + 4 + 4 = 14 points)

On considère une fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	$f(x)$
2	3,0103
3	4,7712
4	
5	6,9897
6	7,7815
7	8,4510

Cette fonction vérifie la propriété suivante : $\forall x, y > 0 : f(x\,y) = f(x) + f(y)$

1°) Déterminer f(4) et f(1).

2°) Déterminer f(245).

3°) Démontrer que pour tout y >0 : $f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$.

4°) Démontrer que pour tout y >0 : $f(\sqrt{y}) = \frac{1}{2}f(y)$.

Activité 2 (1+1+4+8 = 14 points)

On dit qu'un entier supérieur ou égal à 2 est bon s'il peut s'écrire comme somme de nombres entiers naturels dont la somme des inverses est 1. On dit qu'il est mauvais s'il n'est pas bon. On appellera décomposition d'un entier toute façon d'écrire cet entier sous forme d'une somme d'entiers non nuls (l'ordre dans la somme n'important pas).
Pour la suite, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Ainsi, par exemple : 2 a une seule décomposition : 2 = 1 + 1 et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$ donc 2 est mauvais.

3 a deux décompositions : 3 = 1+2 = 1 + 1+ 1 or $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\neq 1$ et $\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\neq 1$ donc 3 est mauvais.

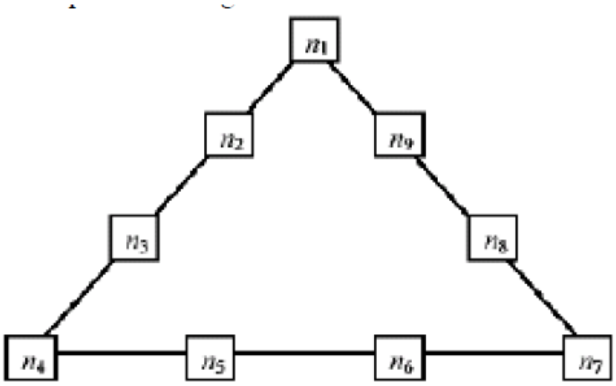
1°) Démontrer que 8 est mauvais et que 10 est bon.

2°) Montrer que le carré de tout entier n est bon.

3°) Montrer que si n est bon alors 2n+2 et 2n+ 9 sont bons.

Activité 3 (2+1,33+1,33+1,33+2,66+2,66+2,66 ≈ 14 points)

On place tous les nombres entiers de 1 à 9 dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué dans la figure ci–dessous.



Si la somme des 4 nombres situés sur chacun des 3 côtés du triangle ont la même valeur S, on dit que le triangle est S-magique.

1°) On place les trois nombres 2, 5 et 8 aux 3 sommets du triangle. Montrer qu'on peut le rendre 20–magique.

2°) On considère un triangle S–magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les 3 sommets.

a) Prouver que : 45 + T = 3 S puis que : $17 \leqslant S \leqslant 23$.

b) Donner la liste des 7 couples (S;T) envisageables.

c) Donner un triangle 17–magique.

3°) Montrer qu'il n'existe pas de triangle 18–magique.

4°) Montrer que s'il existe un triangle 19–magique alors un des sommets est 7.

5°) Prouver que s'il existe un triangle S–magique alors il existe aussi un triangle 40–S magique.